936. 標數 p ノ係數体ニ於ケル Gruppen ring ニツイテ I

大島 勝（高知高校）

H. Brummund ハ Dissertation ニ於テ、同ジ表題ノ下ニ群 $\mathfrak{G}'$ ガアーベル群, p-gruppe 及ビ $\mathfrak{G}$ ノ Sylowgruppe ガ Normalteiler ナルトキ $\mathfrak{G}$ ノ Gruppen ring Γ ノ構造ヲ研究シ、Sylowgruppe ガ Normalteiler デアルトイフ假定ノ下ニ、Γ ガ Primär Zerlegbar ナルタメノ必要ニシテ十分ナル條件ヲ得テヰル。

ソノ証明ハ相當面倒ナノデ Brauer ノ Modular Darstellung ノ理論ニヨリ簡單ニ証明出来レバロウト思ッテ少シ考ヘテ来マシタ所、近着ノ Annals (Vol. 42. NO.2) ノ Brauer 及ビ Nesbitt ノ論文ヲ見テ、Sylowgruppe ガ Normalteiler トイフ條件ナシニ、一般ノ場合ニ於テ Γ ガ Primär Zerlegbar ナルタメノ必要ニシテ十分ナル條件ヲ得タ。即チ

定理 1. 位數 $g = p^a g'$, $(p, g') = 1$ ナル Gruppe $\mathfrak{G}$ ノ標數 p ノ Körper ニ於ケル Gruppen ring Γ ハ $\mathfrak{G}$ ガ位數 g' ノ Normalteiler ヲ持ツトキニ限リ Primär Zerlegbar デアル. 更ニ Sylowgruppe ガ Zyklisch ナル時且ツソノ時ニ限リ Γ ハ einreihig デアル。

以下コノ定理ノ証明及ビ Primär Zerlegbar ナ

Gruppen ring ノ表現ノ問題ニツイテ少シ述べサセテ頂キマス。

記号ハスベテ Brauer ノ論文ニ從フ. 即チ代數体 K ニ於ケル $\mathfrak{G}$ ノ既約表現ヲ

$$Z_1, Z_2, \cdots\cdots Z_n$$

トスル. コヽニ K ハ $\mathfrak{G}$ ノ絶對既約指標ヲ含ンデヰルモノトスル. 從ツテ n ハ $\mathfrak{G}$ ノ共軛類 $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{C}_n$ ノ個數ニ等シ。P-regular Element ヲ含ム共軛類ヲ $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{C}_{k'}$ トスレバ $\overline{K}$ ニ於ケル Modular irreduzible Darstellung ノ個數ハ丁度 k' 個デ、ソレヲ

$$F_1, F_2, \cdots\cdots\cdots, F_{k'}$$

トシ、F_k ニ對應スル直既約表現ヲ U_k デ表ス、又 F_k $(k=1, 2, \cdots\cdots, k')$ ガ S 個ノ Block

$$B_1, B_2, \cdots\cdots\cdots, B_S$$

ニ分タレタトスル。從ツテ Z_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ モ S 個ノ Block ニ分ケラレル。

〔1〕定理 1 ノ証明.

Gruppen ring Γ ガ Primär zerlegbar ナルコトト各 Block B デガ只一ツノ F_k ヲ含ンデヰルコトトハ äquivalent デアル。從ツテ特ニ最初ノ Block B_1 ガ Einsdarstellung F_1 ノミヲ含ムコトカラ $\mathfrak{G}$ ガ位數 g' ノ Normalteiler ヲ持タナクテハナラナイ。(Brauer P.587)

即チ必要條件ナルコトハ分ツタ. 次ニ $\mathfrak{G}$ ガ位數 g' ノ

Normalteiler $\mathfrak{g}'$ ヲ持テバ $\mathfrak{g}'$ ハ p-regular Element ノ全部ヨリナルカラ F_k ノ個數 k' ハ $\mathfrak{g}'$ ニ含マレテヰル $\mathfrak{g}$ ノ共軛類ノ個數ニ等シク、從ツテ又 $\mathfrak{g}$ ニ関スル $\mathfrak{g}'$ ノ相似表現類 $\bar{F}_k$ ノ個數ト等シクナル（$\mathfrak{g}'$ ノ位數ハ p ト素ナル故相似表現類ハ Modular Darstellung ニ移ツテモ變ラナイ）. 故ニ F_k ハ $\bar{F}_k$ ニヨツテ一意的ニ決定サレル. 又 $\bar{F}_k$ ニ對應スル K ニ於ケル $\mathfrak{g}$ ノ既約表現ヲ $\{Z_\lambda, Z_\mu, \text{------}, Z_\nu\}$ トスルトキハ $\{\bar{Z}_\lambda, \bar{Z}_\mu, \text{------}, \bar{Z}_\nu\}$ ハスベテ既約成分トシテ F_k ノミヲ持ツ.

從ツテ F_k ノミデ一ツノ Block ヲ作ルカラ Γ ハ Primär zerlegbar デアル.[1]（コレデ定理1ノ前半ノ證明ハ終ツタ、後半ノ證明ハ最後ニ證明シテス）

上ノ對應ヲ示セバ次ノ如クナル。

$$\bar{F}_k \longleftrightarrow F_k \longleftrightarrow U_k \longleftrightarrow (Z_\lambda, Z_\mu, \text{----}, Z_\nu) \longleftrightarrow B_k$$

$\bar{F}_k$ ニ屬スル $\mathfrak{g}'$ ノ表現ヲ $F'_{k1}, F'_{k2}, \text{----}, F'_{k\sigma}$ トスレバ

---

(1) $\bar{K}$ デ定理ヲ證明シテオケバ、下ノ Körper ニ於テモ定理1ガ成立スルコトハ準單純環ノ時ト同様デアル. コレハ einreihig ノ場合ニモ云ヘルコトデアル。

$$F_k(\mathfrak{g}') \sim \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} F'_{k1} & & \\ & \ddots & \\ & & F'_{k1} \end{matrix}}_{a_k\text{個}} & & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} F'_{k2} & & \\ & \ddots & \\ & & F'_{k2} \end{matrix}}_{a_k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\begin{matrix} F'_{k\sigma} & & \\ & \ddots & \\ & & F'_{k\sigma} \end{matrix}}_{a_k} \end{pmatrix}$$

但シ後デ $a_k=1$ ナルコトヲ証明スル

$$Z_\lambda(\mathfrak{g}') \sim \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} F'_{k1} & & \\ & \ddots & \\ & & F'_{k1} \end{matrix}}_{b_\lambda\text{個}} & & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} F'_{k2} & & \\ & \ddots & \\ & & F'_{k2} \end{matrix}}_{b_\lambda} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\begin{matrix} F'_{k\sigma} & & \\ & \ddots & \\ & & F'_{k\sigma} \end{matrix}}_{b_\lambda} \end{pmatrix}$$

以上ニ依リ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. *Primär zerlegbar* ナ *gruppenring* Γ ニ於テハニツノ完全可約表現 W_1, W_2 ハ $W_1(\mathfrak{g}')$, $W_2(\mathfrak{g}')$ ガ *äquivalent* ナルトキニ限リ *äquivalent* デアル。

標数 0 ノ *Körper* ニ於ケル $\mathfrak{g}$ ノ *halblineäre Transformation* ニヨル *Darstellung* ノトキモ $\mathfrak{g}$ ノ既約表現 ($h \cdot T$ ニヨル) ハ $\mathfrak{g}'$ ノ相似表現類ニヨッテ一意的ニ決定サレル故、後デ述ベル如ク色々類似ノ定理ガ得ラレル。定理2ハソノ一例デアル。

〔2〕 *Primär Zerlegbar* ナ *Gruppenring* Γ ノ表現.

$\mathfrak{K}_k$ ニ属スル一ツノ表現 F'_{k1} ノ Charakter ヲ $\chi_{k1}(G')$ デ表ハセバ，スベテノ g' ノ元 G' ニ対シテ

$$\chi_{k1}(G') = \chi_{k1}(P_j^{-1} G' P_j)$$

ヲ満足スルヤウナ Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ ノ元 P_j ハ $\mathfrak{P}$ ノ部分群 $\mathfrak{P}_{k1}$ ヲツクル．$\mathfrak{K}_k$ ニ属スル既約表現ノ個数ハ $(\mathfrak{P}:\mathfrak{P}_{k1})$ ニ等シキ故

補助定理1. $\mathfrak{K}_k$ ニ属スル既約表現ノ個数ハ p^{α_k} $(0 \leqq \alpha_k \leqq a)$ ニ等シ。

次ニ相似ナル表現ヨリ induzieren シタ g ノ表現ハ äquivalent ナル故、$F'_{k\lambda}$ ヨリ induziiren シタ g ノ表現ハ U_k ト äquivalent デアル。

従ツテ U_k, F_k ノ次数ヲ U_k, f_k トスレバ

$$\text{I.}\quad \begin{cases} u_k = f'_k p^{a} \\ f_k = f'_k p^{\alpha_k} \end{cases}$$

但シ f'_k ハ $\mathfrak{K}_k$ ニ属スル表現ノ次数

定理3. U_k, F_k ノ次数ヲ U_k, f_k トスレバ u_k, f_k ハイヅレモ g ノ約数デアル。

f'_k ハ g' ノ約数ナル故明ラカデアル。

定理4. 既約表現 F_k ハ $\mathfrak{K}_k$ ニ属スル相似表現ヲ丁度一ツヅツ含ム。

次ニ Cartan Invariants ノ作ル Matrix ヲ考ヘルト (I) ヨリ

$$
C=\begin{pmatrix} p^{a} & & & \\ & p^{a-\alpha_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{a-\alpha_{k'-1}} \end{pmatrix}
$$

從ッテ次ノ定理ヲ得ル。（Brauer P. 568）

定理5. α-type ノ既約表現ノ個數ハ $\mathfrak{g}'$ ニ含マレル $\mathfrak{g}$ ノ共軛類デ、ソノ含ム元ノ數ガ丁度 p^{α} デ割リ切レルモノノ個數ニ等シ。

從ッテスベテノ既約表現ガ lowest kind ナルトキハ $\mathfrak{g}'$ ニ含マレル $\mathfrak{g}$ ノ共軛類ノ含ム元ノ數ガ、スベテ p ト素トナルカラ $\mathfrak{g}'$ ノ元ハスベテノ Sylowgruppe $\mathfrak{p}$ ノ元ト kommutativ トナル。故ニ $\mathfrak{p}$ ハ $\mathfrak{g}$ ノ Normalteiler トナル。又特ニ既約表現ノ次數ガスベテ1ナルトキハ $\mathfrak{g}'$ ガアーベル群トナラナクテハナラナイ。

定理6. $\mathfrak{g}$ ガ位數 g' ノ Normalteiler $\mathfrak{g}'$ ヲ有スルトキハ Sylowgruppe $\mathfrak{p}$ ガ Normalteiler ナルトキニ限リ、スベテノ $\mathfrak{g}$ ノ既約表現ガ lowest kind トナル。從テコノトキハ $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\times\mathfrak{p}$

定理7. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\times\mathfrak{p}$ ニシテ且ツ $\mathfrak{g}'$ ガアーベル群ナルトキニ限リ $\mathfrak{g}$ ノスベテノ既約表現ノ次數ハ 1 ニ等シ。（$\mathfrak{g}$ ガ Normalteiler $\mathfrak{g}'$ ヲ有スルコトハ勿論假定シテ）

定理6ガ一般ノ場合ニ成立スルカドウカハマダ未解決デアル。（Brauer P.587）

(3) $\mathfrak{g}$ ノ既約表現ノ Konstruktion.

$\mathfrak{K}_i$ ニ屬スル一ツノ $\mathfrak{g}'$ ノ既約表現 F'_k ニ對シテ $\mathfrak{p}_k$ ハ前ト同ジク

$$\chi_k(G') = \chi_k(P^{-1}G'P)$$

ヲ滿足スル元 P ヨリ出來タ $\mathfrak{p}$ ノ部分群トスル。

$$\mathfrak{p} = Q_0\mathfrak{p}_k + Q_1\mathfrak{p}_k + \cdots\cdots + Q_{i-1}\mathfrak{p}_k \qquad (Q_0 = E)$$

ナラバ

$$\mathfrak{g} = Q_0\mathfrak{g}_k + Q_1\mathfrak{g}_k + \cdots\cdots + Q_{i-1}\mathfrak{g}_k$$

且ツ F'_k ニ於テ $\mathfrak{g}'$ ノ元 G' ニ Matrix $\nabla(G')$ ガ對應シテヰルトキ $\mathfrak{g}_k$ ノ既約表現デ、$\mathfrak{g}'$ ノ元 G' ニ對應スル Matrix ガ $\nabla(G')$ ナル如キモノガ只一ツアル．コレヲ Σ_k トシ，$\mathfrak{g}_k$ ノ元 G_k ニ對シテ Matrix $\mathbb{W}(G_k)$ ガ對應シテヰルトスル．勿論 G_k ガ $\mathfrak{g}'$ ノ元ナルトキハ $\mathbb{W}(G_k) = \nabla(G_k)$ デアル．Σ_k ヨリ induzieren シタ $\mathfrak{g}$ ノ表現ハ F_k ニ äquivalent デアル。

尚 halblineare Transformation 又ハ Kollineation ニヨル $\mathfrak{g}$ ノ表現ノトキモ大体 parallel ニ行クト思ヒマス。

$$\Sigma_k(\mathfrak{g}) : G \to \begin{pmatrix} \mathbb{W}(Q_0GQ_0^{-1}) & \mathbb{W}(Q_0GQ_1^{-1}) & \cdots\cdots & \mathbb{W}(Q_0GQ_{i-1}^{-1}) \\ \mathbb{W}(Q_1GQ_0^{-1}) & \mathbb{W}(Q_1GQ_1^{-1}) & \cdots\cdots & \mathbb{W}(Q_1GQ_{i-1}^{-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{W}(Q_{i-1}GQ_0^{-1}) & \mathbb{W}(Q_{i-1}GQ_1^{-1}) & \cdots\cdots & \mathbb{W}(Q_{i-1}GQ_{i-1}^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{但シ } Q_\nu G Q_\mu^{-1} \in g_K \text{ ナルトキハ} \\ \qquad W(Q_\nu G Q_\mu^{-1}) = 0 \end{cases}$$

F_κ ト $\Sigma_\kappa(g)$ デ g' ノ元ニ對應スルモノヲ考ヘレバ, *äquivalent* ナ g' ノ表現トナリ、F_κ ガ既約ナルコトヨリ

$$F_\kappa \sim \Sigma_\kappa(g)$$

Gruppen ring Γ ガ *einreihig* ニナルトキノ事ニツイテハ次ノ機會ニ述ベマス。

尚 *halblineare Transformation* 又ハ *Kollineation* ニヨル g ノ表現ノ時モ大体 *parallel* ニ行クト思ヒマス。

——以上——